パラボラ形アーチについての一考察

長元 亀久男

One Consideration on the Problem of a Parabolic Arch

Kikuo NAGAMOTO

The geometrical consideration on the equation for the horizontal thrust of a parabolic arch with pin hnige is treated in this paper.
Applicating this result, the calculation of this equation is simplyfied.

第1図のようなピン支持の弾性アーチについて考えその水平線からの高さを y であらわしアーチの軸線にそうての徴小な長さを ds とする。M_0 を単純梁として A 端より $K\ell$ のところに荷重 P をうけているときの曲げモーメントとし直接応力および温度による影響を省略して考えれば，I を断面の二次モーメントとして水平推力 H はつぎの式から求め得られる。[(1)]

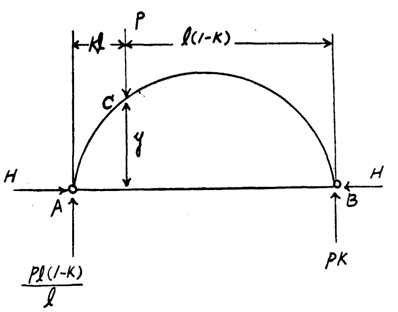
$$H=\frac{\int_0^l \frac{M_0}{I}\,y\,ds}{\int_0^l \frac{y^2}{I}\,ds} \qquad (1)$$

パラボラ形アーチにおいて中央頂部の断面二次モーメントを I_0 とし，アーチ軸線上各点においての接線と水平線とのなす角を θ とすれば $I\cos\theta=I_0$ となるように各点の断面二次モーメントをきめるのが普通である。このようにすれば等分布荷重による曲けモーメントを零にすることができるからである。このようなアーチにおける水平推力は $ds=dx/\cos\theta$ からつぎのようになる。

$$H=\frac{\int_0^l \frac{M_0\,y}{I\cos\theta}\,dx}{\int_0^l \frac{y^2\,dx}{I\cos\theta}} \qquad (2)$$

$I\cos\theta=I_0$ であるから

$$H=\frac{\int_0^l M_0\,y\,dx}{\int_0^l y^2\,dx} \qquad (3)$$



第1図

いま標準荷重状態として第1回のような A, B にてピン支持されたパラボラ形アーチの任意点 C にて荷重 P が垂直に働いている場合を考える。しからばこの場合単純梁としての曲げモーメントはつぎのように計算することができる。

A～C 間　$M_0=\frac{P\ell(1-K)}{\ell}x=P(1-K)x$

C～D 間　$M_0'=PK(\ell-x) \qquad (4)$

いまパラボラ形状はつぎの式で与えられるものとする。

$$y=\frac{4h}{\ell}\left(x-\frac{x^2}{\ell}\right) \qquad (5)$$

この場合の水平推力はつぎの式で求めることができる。[(1)]

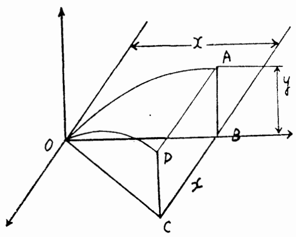
$$H=\frac{P\frac{4h}{l}\left[(1-k)\int_0^{kl}\left(x-\frac{x^2}{l}\right)xdx+k\int_{kl}^{l}(l-x)\left(x-\frac{x^2}{l}\right)dx\right]}{\left(\frac{4h}{l}\right)^2\int_0^{l}\left(x-\frac{x^2}{l}\right)^2dx}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

さて(1)式にてあらわれる場合の水平推力を求める図式的計算方法は既に述べられているが[2]茲ではいま述べたパラボラ形アーチについて(6)式のように計算された水平推力について幾何学的考察をしてみよう。それがためまず与えられたパラボラにつきつぎのような計算をする。

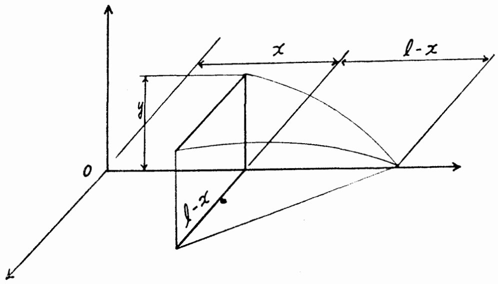
$$\frac{4h}{l}\int\left(x-\frac{x^2}{l}\right)xdx=\frac{4h}{l}\ \frac{x^3}{12}\left(4-3\frac{x}{l}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\left(\frac{4h}{l}\right)^2\int\left(x-\frac{x^2}{l}\right)^2dx=\frac{8}{15}h^2l\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

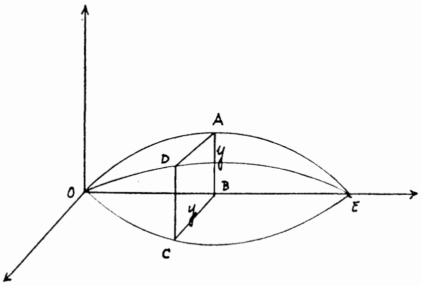
(6)式分子の〔　〕なる括弧内について考察するに(7)式から第1項は第2図にて示されるような，一つの辺はパラボラ形アーチの高さ他の辺は水平に測つた長さをもつ矩形を集めた一つの容積体をもつてあらわされる。



第2図



第3図



第4図

第2項は(7)式にて x を $(l-x)$ におきかえたもので第3図のような一つの容積体をもつてあらわされる。分母については(8)式によりパラボラ形アーチの高さを両辺とする正方形を集めたもので第4図のような一つの容積体をもつてあらわされる。ここで(6)式の分母子は第2図第3図のようにアーチ形と水平距離による一つの幾何学的表現としてあらわされることになる。水平推力をこのように考察することはパラボラの形状と直接むすびついて興味があり，またこのような問題の取扱いを簡便にしてくれる。

このような特性を考えながら(6)式の計算をすすめるとつぎのようになる。

$$\int_0^{kl}\left(x-\frac{x^2}{l}\right)xdx=\left[\frac{x^3}{12}\left(4-3\frac{x}{l}\right)\right]_0^{kl}$$

$x=kl$ を代入すれば　$=\dfrac{k^3l^3}{12}(4-3k)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

$\displaystyle\int_{kl}^{l}(l-x)\left(x-\frac{x^2}{l}\right)dx$ は(7)式にてxの代りに $(l-x)$ とおけばよい。

$$\int_{kl}^{l}(l-x)\left(x-\frac{x^2}{l}\right)dx=\frac{(l-x)^3}{12}\left[4-3\left(\frac{l-x}{l}\right)\right]=\frac{l^3(1-k)^3}{12}(1+3k)\cdots\cdots(10)$$

$x/l,=k$ とおき(6)式分子の〔　〕内に代入すると

$$\frac{k^3l^3}{12}(4-3k)(1-k)+\frac{l^3(1-k)^3}{12}(1+3k)k$$

$$= \frac{l^3}{12}\left\{k^3(4-3k)(1-x)+(l-k)^3(1+3k)k\right\}$$

$1-k=X$

$$= \frac{l^3}{12}\left\{k^3(4-3k)X+X^3(1+3k)k\right\}$$

$$= \frac{kl^3}{12}\left\{X(4k^2+X^2)-3kX(k^2-X^2)\right\}$$

$$= \frac{kl^3}{12}\left\{(1-K)(1-2k+5k^2)-3k(1-k)(2k-1)\right\}$$

$$= \frac{kl^3}{12}\left\{(1-k)(1+k-k^2)\right\}=\frac{l^3}{12}(1-2k^2+k^3)\cdots\cdots(11)$$

(6) 式〔　〕内に (11) を代入し分母には (8) 式を代入すれば

$$= H\frac{\frac{4ph}{l}\times\frac{kl^3}{12}(1-2k^2+k^3)}{\frac{8}{15}h^2l}=\frac{5Plk}{8h}(1-2k^2+k^3)\cdots\cdots(12)$$

(1) 式の特別な場合としてピン支持のパラボラ形アーチの問題につきこのような幾何学的考察をしておけば一般のピン支持弾性アーチの問題の場合は水平軸の代りにアーチ軸線について考えれば よいわけでこの場合の図式的計算[2]が容易に類推でき実用計算下便利なものであると考える。

(1) 例えば 谷口忠：構造力学，裳華堂，403頁，
福田武雄：構造力学，河出書房，233頁。

(2) 谷口忠：構造力学，裳華堂　409頁